



Descomposición de Cholesky: Overview

Prof: Natacha Astromujoff // Auxiliar: Damián Cid

Nyx Butelmann

27 de diciembre de 2025

1. Introducción
2. Factorización QR
3. Factorización de Cholesky
4. Aplicaciones

1. Introducción

2. Factorización QR

3. Factorización de Cholesky

4. Aplicaciones

Existen diversas factorizaciones de matrices con una gran cantidad de aplicaciones tanto dentro como fuera del álgebra lineal. En esta presentación trabajaremos con dos de ellas.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) y sea $T: V \rightarrow V$ una transformación lineal (a la que llamaremos operador. Identificaremos a V con $\mathbb{K}^n$ y fijando una base de V identificaremos a T con la matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. El espacio V está dotado de un producto interno.

Definition

Diremos que un operador T es definido positivo si

$$\langle Tx|x \rangle > 0 \quad \forall x \in V/\{0\}.$$

Definition

Diremos que un operador T es unitario si

$$T^*T = Id.$$

Theorem

Si A es definida positiva entonces existe una matriz R cuadrada e invertible.

$$A = R^* R.$$

1. Introducción

2. Factorización QR

3. Factorización de Cholesky

4. Aplicaciones

Theorem

Supongamos que A es una matriz cuadrada con sus columnas todas l.i. Entonces existe un único par de matrices Q y R tales que Q es unitaria, R es triangular superior con todos los elementos de su diagonal positivos, y con

$$A = QR$$

Sean $v_1, \dots, v_n$ las columnas de A . Apliquemos Gram-Schmidt a esta lista para obtener una base ortonormal de V , $e_1, \dots, e_n$. Adicionalmente se cumplirá que $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ para $k \leq n$.

Ahora definamos la matriz R por $(R)_{i,j} = \langle v_i, e_j \rangle$. Si $j > i$, entonces $e_j \perp v_i$, es decir, R es triangular superior.

Definamos Q de modo que sus columnas sean los vectores $e_1, \dots, e_n$, así Q será unitaria.

Veamos que efectivamente $A = QR$: la k -ésima columna de QR será la combinación lineal de las columnas de Q con los coeficientes de la k -ésima columna de R , así la k -ésima columna de QR es

$$\langle v_k | e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v_k | e_k \rangle e_k$$

precisamente la columna k -ésima de A .

Verifiquemos que la diagonal de R es positiva: esto sale de Gram-Schmidt.

La unicidad de Q, R se hereda de las propiedades de las listas ortonormales. □

1. Introducción

2. Factorización QR

3. Factorización de Cholesky

4. Aplicaciones

Theorem

Supongamos que B es una matriz definida positiva. Entonces existe una única matriz R triangular superior y con solo números positivos en su diagonal tal que:

$$B = R^* R$$

.

Como B es definida positiva, existe una matriz cuadrada invertible A tal que

$$B = A^* A$$

, y apliquemos el teorema de la descomposición QR para escribir $A = QR$, luego $A^* = R^* Q^*$ y entonces

$$B = A^* A = R^* Q^* QR = R^* R$$

ya que Q es unitaria. Para demostrar la unicidad se puede escribir $B = S^* S$ para S otra matriz triangular superior de diagonal positiva y se aplica la unicidad de la descomposición QR. □

Cholesky Decomposition

$$A = LL^* = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ 0 & L_{22} & L_{23} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix}$$

1. Introducción

2. Factorización QR

3. Factorización de Cholesky

4. Aplicaciones

- Cálculo de valores y vectores propios
- Machine learning

- Resolución de sistemas lineales
- Optimización convexa
- Problema de los menores cuadrados

¡Muchas gracias!

- (1) Axler, S. (2024). *Linear Algebra Done Right*. Springer.
<https://linear.axler.net/LADR4e.pdf>
- (2) van de Geijn, R. (2014). *Notes on Cholesky Factorization*.
<https://www.cs.utexas.edu/flame/Notes/NotesOnChol.pdf>